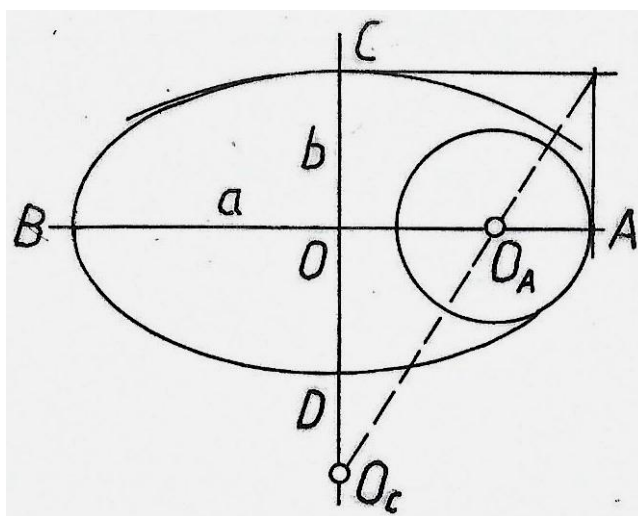


KÉT ELLIPSZIS-SZERKESZTÉS

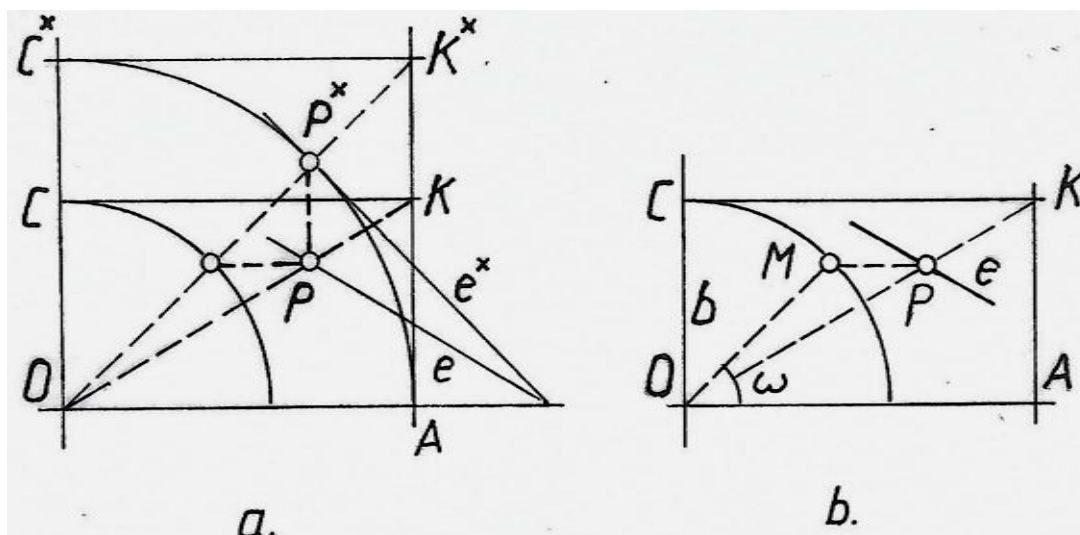
Írta: Hajdu Endre

Az alábbiakban először egy olyan segédszerkesztésről esik szó, mely az ellipszis szabadkézzel végzett vázolásánál előnyt jelenthet. Mint ismeretes, az a, b féltengely-méretekkel megadott ellipszis A , ill. C pontjához tartozó simuló kör sugara $r_A = \frac{a^2}{b}$, ill. $r_C = \frac{b^2}{a}$. A simuló körök középpontjai az 1. ábra szerinti szerkesztéssel jelölhetők ki.



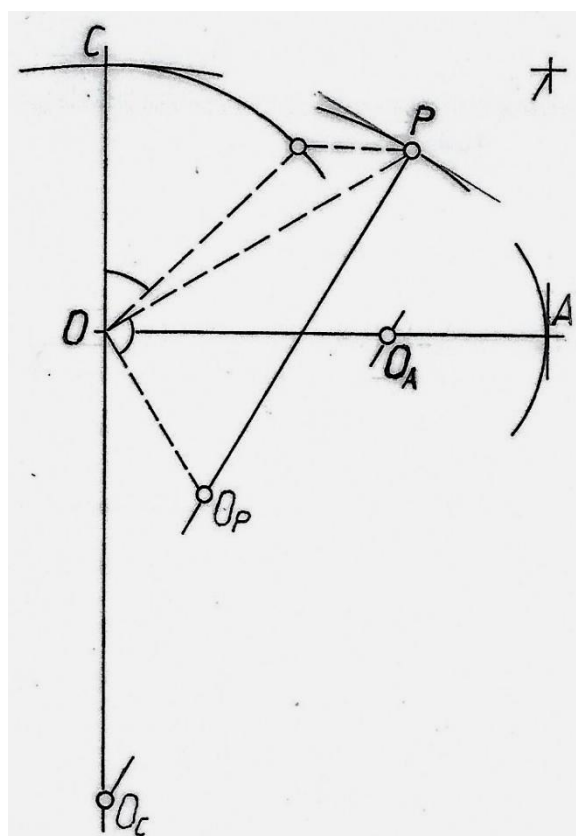
1. ábra

A simuló körök birtokában az ellipszis már „majdnem megrajzolható”, vagyis meglehetősen biztonsággal vázolható a görbe, de igen hiányzónak tűnik a két különböző sugarú simuló kör között legalább egy további görbe-pont, melynek, ha ismernénk a hozzá tartozó érintőjét is, már nagyobb biztonsággal vázolhatnánk a görbét. Egy olyan szerkesztésről esik szó az alábbiakban, mely az említett hiányzó pont kijelölésére ad egy lehetséges megoldást, a hozzá tartozó érintővel együtt. Az ellipszis A, C tengelypontjaihoz tartozó érintők közös K pontjának és a görbe O középpontjának összekötő egyenese metszi ki az ellipszist a hiányzó P pontot (2. ábra). A metszéspont egyebek között az úgynevezett „két körös szerkesztéssel” határozható meg, melynek során először az O középpontú, a sugarú negyedkör és az OK^* egyenes P^* metszéspontját kapjuk, majd magát a keresett P pontot. A P ponthoz tartozó érintő szerkesztése is leolvasható az ábráról: a P pont érintője párhuzamos az AC – meg nem rajzolt – egyenessel. Eredeti célunk, vagyis az ellipszis vázolását megkönnyítő simuló körök közötti további pont keresése szempontjából elhagyható a 2/a ábra néhány vonala; elegendő az O ponthoz illeszkedő, $\omega = 45^\circ$ hajlásszögű egyenes és a b sugarú kör M metszéspontját meghatározni, a P pont és az e érintő szerkesztése már nyilvánvaló. Ezek után az ellipszis vázolása a tengelyponti simuló körök és egy



2. ábra

köztük lévő, érintőjével együtt ismert ellipszis-pont birtokában lényegesen könnyebb. Megjegyzendő azonban, hogy W. Wunderlich egy észrevétele még további lehetőséget is nyújt feladatunk szempontjából; ugyanis ő arra mutatott rá, hogy a különleges helyzetű P pont esetében a simulókör igen egyszerűen nyerhető: a P -beli normális és az OP szakaszra O -ban állított merőleges közös pontja az O_P görbületi középpont! Az ellipszis vázolója ilyen módon három simulókör ismeretében végezhető (3. nagyított ábra).



3. ábra

A második – ellenőrző – szerkesztés azzal a kérdéssel kapcsolatos, hogy az ellipszis melyik pontja van legközelebb két tengelyponti érintő közös pontjához, a 3. ábra K pontjához például. A kérdést számítással válaszoljuk meg, majd szerkesztéssel ellenőrizzük. A 4. ábra O kezdőpontú koordináta-rendszerében az ellipszis egyenlete $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Az említett K pont koordinátái $x = a$, $y = b$.

A K pont és az ellipszis egy tetszőleges, az ábrán nem jelölt Q pontjának távolsága $t = KQ = \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2}$, ahol az x , ill. $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ a Q pont

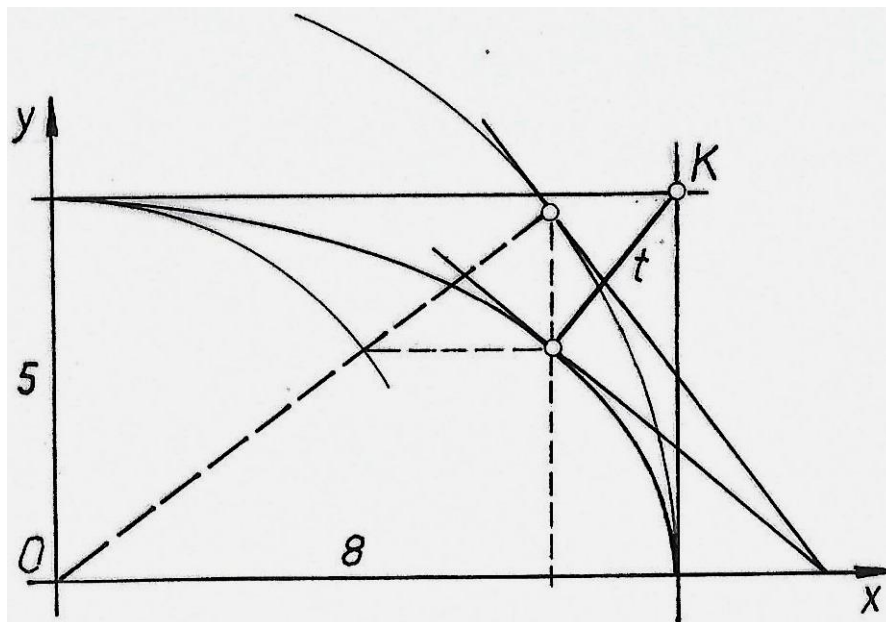
két koordinátája. A t távolság ezekkel a következő: $t = \sqrt{(a-x)^2 + (b - \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2})^2}$.

A t távolság legkisebb értékének meghatározása végett képezzük annak x szerinti deriváltját! A deriválást elvégezve és egyszerűsítve a

$$\frac{dt}{dx} = -a^3 + (a^2 - b^2)x + ab^2 \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 0 \text{ egyenletre jutunk, melyből } x \text{ próbálgatás-}$$

sal kapható: $x \left[(a^2 - b^2) + \frac{ab^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \right] = a^3$. Példaképpen határozzuk meg a 4. ábra

ellipszisének esetében ($a = 8$ és $b = 5$), a K ponthoz legközelebbi ellipszis-pont x koordinátáját!



4. ábra

Az ábra alapján sejthető, hogy kb. $x = 6,4$ a keresett érték. Ellenőrizzük!

$$6,4 \left[(64 - 25) + \frac{8,25}{\sqrt{64 - 40,96}} \right] = 516,26 \neq 512 = a^3$$

Csökkentsük x -et!

$x = 6,35$ - nél az eredmény 508,647;

$x = 6,37$ - nél 511,70;

$x = 6,372$ - nél 511,97 jó közelítő érték.

A továbbiakban az $x = 6,372$ koordinátával számolva, a másik koordináta $y = 3,02$.

Ezekkel a közelítő értékekkel a K ponthoz legközelebbi ellipszis-pont távolsága

$t = 2,56$, a szerkesztéssel nyerhető értékekkel egyezően.

Sopron, 2020. 07. 25.